

4. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений*. — М.: Изд-во «Факториал», 1995.

В. П. Маслов, А. С. Мищенко (Москва)

**ГЕОМЕТРИЯ ЛАГРАНЖЕВОГО МНОГООБРАЗИЯ  
В ТЕРМОДИНАМИКЕ (ПРИНЦИП  
МИНИМИЗАЦИИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО  
ПОТЕНЦИАЛА И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ  
НЕРАВЕНСТВА)**

Считается, что классические термодинамические свойства вещества определяются соотношениями, связывающими объем, давление, температуру, энтропию и энергию данного вещества. В общем случае вещество характеризуется некоторым числом величин, половина которых является интенсивными, а половина — экстенсивными величинами. С этой точки зрения давление и температура считаются интенсивными величинами, а объем и энтропия — экстенсивными величинами. Современная точка зрения заключается в том, что в состоянии термодинамического равновесия вещество следует характеризовать точкой в пространстве  $R^{2n+1}(p, q, \Phi)$ , где координаты  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  являются интенсивными величинами, первые две из которых являются давлением и температурой ( $q_1 = P, q_2 = -T$ ), а координаты  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  являются экстенсивными координатами, первые две из которых являются объемом и энтропией ( $p_1 = V, p_2 = S$ ). Первые четыре координаты  $(P, V, T, S)$  описывают, так сказать, переменные механической природы для гомогенных веществ. В общем случае следует рассматривать гетерогенные (т.е. многокомпонентные) системы, а также переменные немеханической природы (например, электромагнитные свойства).

В любом случае, пространство  $R^{2n+1}(p, q, \Phi)$  снабжается контактной структурой, т.е. дифференциальной 1-формой  $\omega = d\Phi - pdq$ , а множество термодинамических равновесных состояний вещества представляется подмногообразием  $L \subset R^{2n+1}(p, q, \Phi)$ , на

котором  $\omega = 0$ . Следовательно, проекция  $L_0 \subset R^{2n}(p, q)$  является лагранжевым подмногообразием в симплектическом пространстве  $R^{2n}(p, q)$  с симплектической формой  $\Omega = dp \wedge dq$ . Функция  $\Phi$  является функцией действия на лагранжевом многообразии  $L_0$ ,  $d\Phi = pdq$ . Для классической термодинамики она совпадает с термодинамическим потенциалом ( $\Phi = E + PV - TS$ ).

По Гиббсу [1] энергия  $E$  является функцией переменных  $(V, S)$ , как, впрочем, и все остальные термодинамические величины. Это означает, что лагранжево многообразие  $L_0$  взаимно-однозначно проецируется на область в пространстве  $R^2(P, S)$ , т.е. многообразие  $L$  задается графиком функции  $E' = E(V, S)$ . Неявно Гиббс на самом деле предполагает, что поверхность  $E = E(V, S)$ , будучи некомпактной, обладает свойством, что всякая ее опорная плоскость касается поверхности в каждой общей точке. Это условие обеспечивает выполнение следующего утверждения: из минимизации термодинамического потенциала при фиксированных  $P$  и  $T$  следует положительность гессиана функции  $E = E(V, S)$ ,  $\text{Hess}_{(V, S)} E(V, S) > 0$ . По Маслову [3] такие состояния называются *существенными*. Тогда в существенных состояниях выполняются локальные термодинамические неравенства [2].

Рассмотрим функцию

$$\tilde{\Phi}^L(q) = \min_{q(x)=q; x \in L} \Phi(x)$$

при условии существования указанного минимума. Рассмотрим симплектическое преобразование  $\varphi$  симплектических пространств

$$\varphi : R^{2n}(p, q) \longrightarrow R^{2n}(P, Q)$$

и лагранжево многообразие  $\Gamma_\varphi \subset R_{4n}(P, p, Q, q)$ , являющееся графиком преобразования  $\varphi$ . Пусть  $S$  — функция действия на лагранжевом многообразии  $\Gamma_\varphi$ ,  $dS = PdQ - pdq$ . Предположим, что многообразие  $\Gamma_\varphi$  однозначно проецируется на пространство  $R^{2n}(Q, q)$ . Тогда функция  $S$  может пониматься как функция от переменных  $(Q, q)$ ,  $S = S(Q, q)$ . В этом случае функция  $S$  называется *производящей функцией* преобразования  $\varphi$ .

Симплектическое преобразование естественно продолжается до контактного преобразования контактных пространств

$$\tilde{\varphi} : R^{2n+1}(p, q, \Phi) \longrightarrow R^{2n+1}(P, Q, \Phi_1).$$

Пусть  $L_1 = \tilde{\varphi}(L)$  и  $\tilde{\Phi}^{L_1}(Q)$  определяется по аналогии для многообразия  $L_1$ .

**Теорема 1.** При подходящем выборе граничных условий на многообразии  $L$  и преобразование  $\varphi$  имеет место следующая формула

$$\tilde{\Phi}^{L_1}(Q) = \min_q \left( S(Q, q) + \tilde{\Phi}^L(q) \right).$$

Аналогично, если  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  — последовательность симплектических преобразований, допускающих производящие функции

$$S_1(Q, q_1), S_2(q_1, q_2), \dots, S_n(q_{n-1}, q_n)$$

и  $L_1 = \tilde{\varphi}_1 \tilde{\varphi}_2 \dots \tilde{\varphi}_n(L)$ , то

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^{L_1}(Q) = \min_{q_1, q_2, \dots, q_n} & ((S_1(Q, q_1) + S_2(q_1, q_2) + \dots + \\ & + S_n(q_{n-1}, q_n) + \tilde{\Phi}^L(q_n))). \end{aligned}$$

Выбор граничных условий должен обеспечить существование минимума при вычислении  $\tilde{\Phi}^{L_1}$ . Теорема 1 обеспечивает отображение несущественных точек многообразия  $L$  в несущественные точки многообразия  $L_1$  (ср. [3]).

**Теорема 2.** Пусть матрица  $\text{Hess}_{(Q,q)} S(Q, q)$  имеет индекс инерции, равный  $(n, n)$ , и пусть существует минимум

$$\tilde{\Phi}^{L_1}(Q) = \min_q \left( S(Q, q) + \tilde{\Phi}^L(q) \right).$$

Тогда

$$\text{Hess}_Q \tilde{\Phi}^{L_1}(Q) < 0.$$

Теорема 2 обеспечивает выполнение локальных термодинамических неравенств в существенных точках лагранжевого многообразия  $L_1$ .

**Теорема 3.** Пусть  $L$  — лагранжево многообразие, однозначно проектирующееся на  $p$ -координаты. Тогда при подходящем выборе граничных условий в существенных точках выполняются локальные термодинамические неравенства, т.е.

$$\text{Hess}_q \Phi^L(q) < 0.$$

В качестве подходящих граничных условий для теоремы 3 может служить следующее условие:

**Условие 1.** Функция  $E(p)$ ,  $dE = -qdp$ ,  $E = \Phi^L(p) - pq$  локально выпукла вверх во всей области определения  $G(p) \subset R^n(p)$  за исключением некоторого компакта  $K \subset G(p)$ .

Условие 1 выполняется для большинства модельных примеров газов (идеальный газ, газ Ван дер Ваальса, вырожденный газ Ферми).

Теоремы 1 и 2 позволяют построить такое лагранжево многообразие, которое не проектируется однозначно на  $p$ -координаты, но во всех существенных точках удовлетворяет локальным термодинамическим неравенствам.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гиббс Дж. В. *Метод геометрического представления термодинамических свойств веществ при помощи поверхностей.* — В книге: "Термодинамика. Статистическая механика". — М.: Наука, 1982. — С. 40–60.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Статистическая физика.* — М.: Наука, 1964.
3. Маслов В. П. *Об одном классе лагранжевых многообразий, отвечающем вариационным задачам, задачам теории управления и термодинамики*// Функциональный анализ и его приложения. — 1998. — Т. 32. — № 2. — С. 89–91.

А. В. Медведев (Москва)

## О ВОГНУТОЙ МАЖОРАНТЕ МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Получены два обобщения леммы С.Б. Стечкина [1] о вогну-